УРОК 2

Тема: Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників.

Підручник з математики для 9 класу Розділ 4, § 15

Доброго дня, сьогодні розпочнемо з перевірки домашнього завдання.

720. *Відповідь:* 1) 120°; 2) 36°.

725. *Відповідь:* 1) ні; 2) так; 3) ні; 4) так.

Отже, перевіримо засвоєний матеріал на попередньому уроці за допомогою математичного диктанту.

Математичний диктант

Дано правильний n-кутник.

$n = 4$.

Знайдіть:

а) суму кутів многокутника;

б) внутрішній кут многокутника;

в) зовнішній кут многокутника;

г) центральний кут многокутника;

д) сторону многокутника, якщо його периметр дорівнює 24 см;

є) апофему многокутника, якщо його сторона дорівнює 20 см.

Відповіді

Варіант 1. а) 360°; б) 90°; в) 90°; г) 90°; д) 6 см; є) 10 см.

Тож перейдемо до вивчення нового матеріалу.

Виведення формул радіусів вписаного і описаного кіл правильного многокутника

Нехай задано сторону a_n правильного n-кутника (рис. 75), знайдемо радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола.

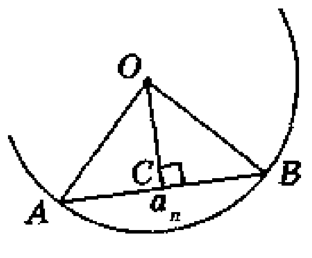

Рис. 75

Розглянемо трикутник AOB, у якому $AB = a_n$, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ як центральний кут правильного n-кутника. Проведемо висоту OC цього трикутника, тоді

$$\angle AOC = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

Із трикутника *AOC* знаходимо:

$$R = AO = \frac{AC}{\sin\angle AOC} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}; \; r = OC = \frac{AC}{tg\angle AOC} = \frac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}}.$$

Отже, $R = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$, $r = \dfrac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$.

Виведення формул радіусів вписаного і описаного кіл правильного трикутника, чотирикутника, шестикутника

Виразимо радіуси описаного та вписаного кіл через сторону правильного трикутника, чотирикутника і шестикутника.

Для правильного трикутника (рис. 76):

$$R = \frac{a_3}{2\sin\frac{180^\circ}{3}} = \frac{a_3}{2\sin 60^\circ} = \frac{a_3}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a_3}{\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{a_3}{2tg\frac{180^\circ}{3}} = \frac{a_3}{2tg 60^\circ} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}.$$

Для правильного чотирикутника (рис. 77):

$$R = \frac{a_4}{2\sin\frac{180^\circ}{4}} = \frac{a_4}{2\sin 45^\circ} = \frac{a_4}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a_4}{\sqrt{2}};$$

$$r = \frac{a_4}{2tg\frac{180^\circ}{4}} = \frac{a_4}{2tg 45^\circ} = \frac{a_4}{2}.$$

Для правильного шестикутника (рис. 78):

$$R = \frac{a_6}{2\sin\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a_6}{2\sin 30^\circ} = \frac{a_6}{2\cdot\frac{1}{2}} = a_6;$$

$$r = \frac{a_6}{2tg\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a_6}{2tg 30^\circ} = \frac{a_6}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}.$$

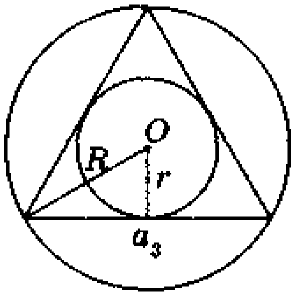

Рис. 76

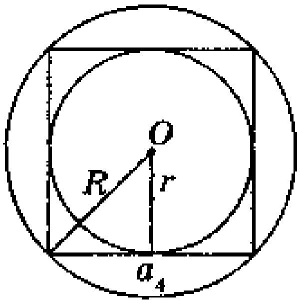

Рис. 77

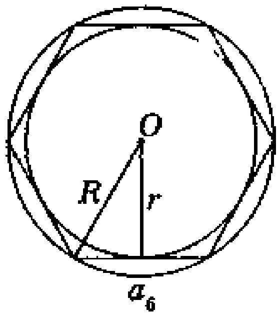

Рис. 78

Результати наших досліджень оформимо у вигляді табл. 5.

Таблиця 5

Загальна формула	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$	$r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \dfrac{a_4}{2}$	$r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$	$R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}} = \dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$r = R\cos\dfrac{180°}{n}$	$r = \dfrac{R}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Виконання вправ

1. Хорда, яка перпендикулярна до радіуса й проходить через його середину, дорівнює стороні правильного вписаного трикутника. Доведіть це.

Доведення

Нехай $AB \perp OD, DC = CO$ (рис. 79). У прямокутному трикутнику BOC катет CO дорівнює половині гіпотенузи BO. Нехай

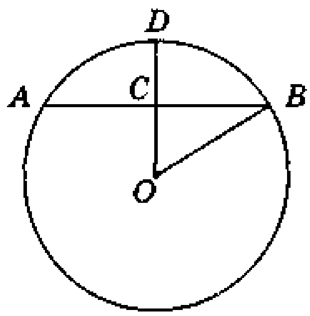

Рис. 79

$BO = R$, тоді $CO = \dfrac{R}{2}$, $AB = 2 \cdot BC = 2\sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{2}} =$

$= \dfrac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Отже, довжина хорди дорівнює стороні правильного трикутника.

2. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює a. Знайдіть сторону правильного шестикутника:

а) вписаного в це коло;

б) описаного навколо цього кола.

Розв'язання

Сторона правильного трикутника дорівнює a, отже, радіус описаного кола $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

а) Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює радіусу кола, описаного навколо шестикутника, і тому сторона цього шестикутника $b = R = \ = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

б) Радіус кола, описаного навколо трикутника, є апофемою правильного шестикутника, і тому сторона цього шестикутника $b = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2a}{3}$.

Відповідь, а) $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$; б) $b = \frac{2a}{3}$.

Розглянемо завдання з підручника 9 класу автор: Істер.

745. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює $2\sqrt{6}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

Розв'язання.

$$a_3 = 2\sqrt{6}\text{ см.}$$

$$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$R = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a_4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$a_4 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\text{ (см)}$$

Відповідь: 4 см.

749. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 12 см, а радіус вписаного в нього кола - $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть кількість сторін многокутника та його сторону.

Розв'язання.

$$r = R\cos\frac{180°}{n}$$

За умовою $6\sqrt{2} = 12\cos\frac{180°}{n}$, звідси

$$\cos\frac{180°}{n} = \frac{6\sqrt{2}}{12}$$

$$\cos\frac{180°}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{180°}{n} = 45°$$

$n = 4$ *з формули* $r = \frac{a_4}{\alpha}$

$$a_4 = 2r = 2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

Домашнє завдання

1. Вивчити формули радіусів вписаного і описаного кіл правильного *n*-кутника.
2. Опрацювати Розділ 4, § 15 на с.142-145.
3. Виконати вправи: №734, №739.